

Simulations

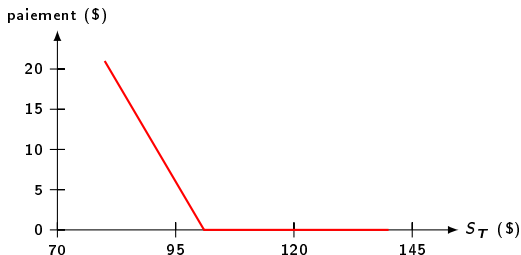
- En programmation dynamique stochastique, on doit calculer les valeurs **espérées** des profits, pour différentes décisions.
- On utilise des **simulations** pour calculer les **espérances** selon des distributions de probabilités données (intégration Monte Carlo).

(voir cours IFT6561 – Simulations: aspects stochastiques)

Option européenne (aucune programmation dynamique)

- Option européenne: paiement à l'échéance
- Option américaine: on peut exercer l'option avant l'échéance (stratégie d'exercice à optimiser)

Exemple: option de vente européenne sur une action suivant le modèle Black-Scholes. Le paiement à $T = 1$ an est $\max(0, K - S_T)$, où K est le prix d'exercice et S_T est le prix (stochastique) de l'action après 1 an. ($K = 101\$, S_0 = 100\%$)



Mouvement brownien géométrique (Black-Scholes)

La probabilité de distribution du prix de l'action est supposée suivre:

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma dB$$

On discrétise le temps:

$$\log(S_{k+1}) = \log(S_k) + (r - \sigma^2/2)(t_{k+1} - t_k) + \sigma \sqrt{t_{k+1} - t_k} \cdot \text{valeur aleatoire } N(0, 1)$$

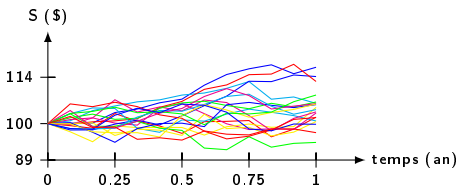
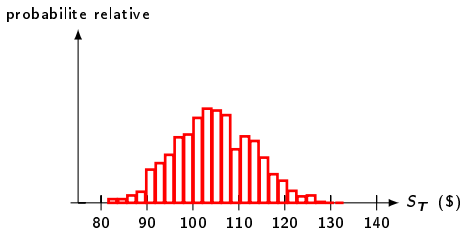


Fig.: $S_0 = 100\$$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.08$, $T = 1$ an, 13 temps discrets

Le prix de l'option est l'espérance des profits (actualisés):

$$\begin{aligned}\text{prix} &= e^{-rT} E_{S_T} [\text{paiement}(S_T)] \\ &= e^{-rT} \int dS_T \text{probabilite}(S_T) \cdot \text{paiement}(S_T) \\ &= e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{paiement}(S_T^{(j)}) = 1.5489\$\end{aligned}$$

La distribution de S_T est log-normale (64000 simulations):



Moindres carrés

On a un ensemble de points $\{(x_j, y_j) : j = 1, \dots, N\}$ et on veut approximer leur dépendance sous la forme $y(x) = \tilde{f}_{\vec{\beta}}(x)$, où $\tilde{f}_{\vec{\beta}}(x) = \sum_{i=1}^d \beta_i \psi_i(x)$ est une combinaison linéaire de fonctions de base (par exemple, $f_{\vec{\beta}}(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$).

Les paramètres $\vec{\beta}$ optimaux minimisent la somme des différences carrées:

$$\min_{\vec{\beta}} \sum_{j=1}^N \left| \tilde{f}_{\vec{\beta}}(x_j) - y_j \right|^2.$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation quadratique qui se réduit à un système d'équations linéaire.

Option de vente américaine

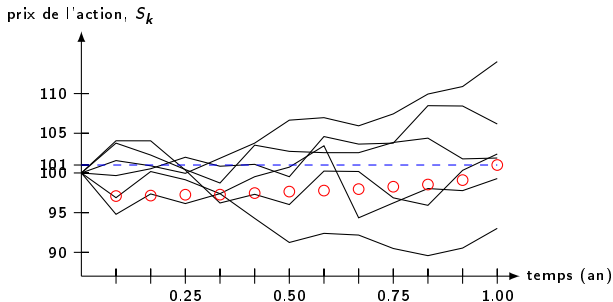
Exemple: sur $T = 1$ an, à chaque mois ($k = 1, \dots, 12$), on a le choix d'**exercer** l'option (paiement = $\max(0, K - S_k)$) ou d'**attendre**, en espérant que le paiement futur soit plus grand que l'exercice immédiat.

Afin de déterminer le prix de l'option au temps 0, on doit déterminer la stratégie d'exercice optimale, pour chaque temps intermédiaire, k . On trouve ces stratégies optimales par chaînage arrière, en évaluant la valeur de l'option aux temps intermédiaires (la valeur de l'option est la "fonction de valeur", $J_k(S_k)$).

Équation de récurrence de programmation dynamique:

$$J_k(S_k) = \max \left(\text{paiement d'exercice}(S_k), e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \mathbb{E}_{S_{k+1}} [J_{k+1}(S_{k+1}) | S_k] \right)$$

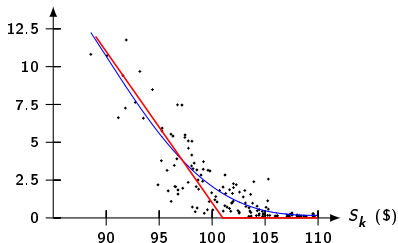
Résultats (stratégie optimale et prix)



Le prix de cette option américaine est de 2.16\$ (la version européenne vaut 1.55\$).

Méthode TvR

valeur d'exercice/valeur d'attendre au mois $k = 6$

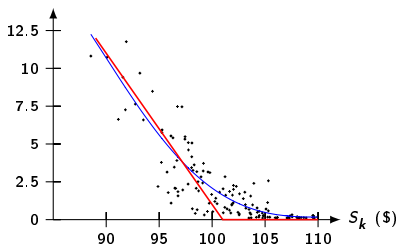


La valeur d'attente, $Q_k(S_k) = e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \mathbb{E}_{S_{k+1}} [J_{k+1}(S_{k+1}) | S_k]$, est estimée par moindres carrés sur l'ensemble de points stochastique:

$$\left\{ \left(S_k^{(j)}, e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \tilde{J}_{k+1}(S_{k+1}^{(j)}) \right) : j = 1, \dots, N \right\}.$$

Méthode TvR (suite)

valeur d'exercice/valeur d'attendre au mois $k = 6$



- La politique “optimale” est donnée par l’intersection des deux courbes.
- La fonction de valeur \tilde{J}_k est donnée par le maximum des deux courbes (dérivée discontinue à l’intersection).

Méthode LSM

La valeur d'attente, $Q_k(S_k) = e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \mathbb{E}_{S_{k+1}} [J_{k+1}(S_{k+1}) | S_k]$, est obtenue par moindres carrés sur l'ensemble de points stochastique:

$$\left\{ \left(S_k^{(j)}, e^{-r(t_{k+1}-t_k)} \tilde{v}_{k+1}^{(j)} \right) : j = 1, \dots, N \right\}.$$

La valeur $v_{k+1}^{(j)}$ est la valeur au temps $k + 1$ de la trajectoire j lorsque la politique d'exercice "optimale" est appliquée sur la partie de la trajectoire du temps $k + 1$ jusqu'au temps final. (Cette politique "optimale" est connue sur les temps futurs par récurrence.)

Cette méthode évite, en partie, l'erreur provenant des moindres carrés dans l'estimation des $\tilde{Q}_k(S_k)$.

Méthode LSM (suite)

Longstaff et Schwartz recommandent aussi de n'utiliser que les points dont le paiement d'exercice est non-nul pour l'ajustement par moindres carrés.

Autres options

- Option américaine-asiatique
- Option américaine sur le maximum de 2 actions
- Obligation avec option de rachat
- N'importe quel problème de programmation stochastique où l'on peut simuler le processus de base (afin d'estimer les profits espérés des différentes décisions).

Les méthodes de simulations sont relativement faciles à implémenter.